Mathematik Vorkurs

Goethe-Universität
in Frankfurt am Main

von
Sven Jarohs

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkungen **3**

2 Grundlegende Begriffe und Regeln der Logik **3**

3 Beweistechniken **7**

4 Einführung in die Mengenlehre **7**

5 Verneinung von Aussagen **10**

6 Die natürlichen Zahlen **11**

7 Spezielle Mengen **13**

7.1 Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ 13

8 Anhang **15**

1 Vorbemerkungen

Dieses Kurzskript richtet sich an Mathematikinteressierte, die noch wenig bis gar keinen Einblick in die höhere Mathematik hatten. Wir werden die Mathematik auf einem *logischen* Grundgerüst aufbauen, das aus einem Axiomensystem und gewissen Regeln, wie diese Axiome agieren dürfen, besteht. Dazu kommt, dass wir in der Mathematik typischerweise eher übersichtlich sind und versuchen alles kurz und knapp zu schreiben. Deshalb werden wir einige Symbole kennenlernen, die wir wie Vokabeln einer Fremdsprache lernen müssen, um die Sprache der Mathematik lesen und verstehen zu können.

2 Grundlegende Begriffe und Regeln der Logik

Bevor wir mathematische Aussagen formulieren und diese später auf ihre Gültigkeit überprüfen können, müssen wir uns zunächst auf ein *System* einigen, wann etwas für gültig empfunden wird und wann etwas falsch ist. Welches System wir hierfür zu Grunde legen, hängt davon ab, was wir erreichen wollen. Diese grundlegenden Regeln nennen wir **Axiome**. Wir werden ein *sinnvolles* System später ansprechen, aber zunächst sei unser Axiomensystem eines, das uns jeden Tag begegnet, d.h. es soll solche Regeln wie

Berlin ist die Hauptstadt Deutschlands.

oder

Katzen haben 2 Ohren.

geben. In der Mathematik versteht man unter einer *Aussage* ein sprachliches Gebilde, welches einen Sachverhalt beschreibt. Dieses darf nur entweder “wahr” oder “falsch” und nicht beides gleichzeitig sein.

Beispiel 2.1.

1. “2 ist eine gerade Zahl.” ist eine Aussage. Sie ist wahr (nach unserem Verständnis).
2. “Diese Aussage ist nicht wahr.” ist keine Aussage, da sie weder wahr noch falsch ist.

Um nun zu überprüfen wie zwei Aussagen zueinander stehen, verwenden wir sogenannte Wahrheitstafeln. Der einfachste Zusammenhang besteht zwischen einer Aussage A und ihrer Verneinung:

Definition 2.2. Es sei A eine Aussage, dann bezeichnen wir mit $\neg A$ die **negierte** Aussage A. Wir lesen $\neg A$ als “nicht A”. A und $\neg A$ stehen im Verhältnis:

A	$\neg A$
w	f
f	w

Beide Aussagen schließen sich gegenseitig aus, d.h. A und $\neg A$ gelten niemals gleichzeitig. Hiermit kommen wir direkt zu unserer nächsten Definition:

Definition 2.3. Es bezeichne $(A \wedge B)$ die Konjunktion zwischen zwei Aussagen A und B. Wir lesen $(A \wedge B)$ als "A und B". Sie ist gegeben durch die Wahrheitstafel:

A	B	$(A \wedge B)$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Beachte: Nur wenn A und B beide gleichzeitig gelten, d.h. beide sind wahr, gilt $(A \wedge B)$.

Beispiel 2.4.

1. Die Aussage ("Berlin ist die Hauptstadt Deutschlands."$\wedge$ "Katzen haben zwei Ohren.") ist wahr.
2. Die Aussage ("Berlin ist die Hauptstadt Deutschlands."$\wedge$" Die Tafel ist blau.") ist falsch.

Wir können nun unsere erste allgemeine Aussage treffen.

Satz 2.5. *Sei A eine Aussage. Dann ist* $(A \wedge \neg A)$ *falsch.*

Beweis. Wir betrachten die Wahrheitstafel von A und $\neg A$:

A	$\neg A$	$(A \wedge \neg A)$
w	f	f
f	w	f

□

Als *Abschwächung* zum logischen Und verwenden wir das logische Oder, d.h. wir untersuchen, ob A oder B wahr ist.

Definition 2.6. Es bezeichne $(A \vee B)$ die Disjunktion zwischen zwei Aussagen A und B. Wir lesen $(A \vee B)$ als "A oder B". Sie ist gegeben durch die Wahrheitstafel:

A	B	$(A \vee B)$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f

Beachte: Das Oder in $A \vee B$ ist ein logisches Oder, welches ein Und einschließt.

Beispiel 2.7.
1. Die Aussage ("2 ist gerade." $\vee$ "Berlin ist die Hauptstadt Deutschlands.") ist wahr.
2. Die Aussage ("Berlin ist die Hauptstadt Deutschlands." $\vee$ "Die Tafel ist blau.") ist wahr.
3. Die Aussage ("Frankfurt ist die Hauptstadt Deutschlands." $\vee$ "Die Tafel ist blau.") ist falsch.

Bemerkung 2.8. Man kann ein "entweder ... oder ... " (welches das Und ausschließt) nun mit Hilfe der Zeichen $\vee$ und $\wedge$ als

$$(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$

definieren. Überlegen Sie sich alternative, gleichbedeutende Definitionsmöglichkeiten.

Satz 2.9. *Sei A eine Aussage. Dann gilt $(A \vee \neg A)$ ist wahr. Wir nennen $(A \vee \neg A)$ eine* ***Tautologie****.*

Beweis. Für A und $\neg A$ gilt folgende Tafel:

A	$\neg A$	$(A \vee \neg A)$
w	f	w
f	w	w

□

Eine weitere Bemerkung zur Wahrheitstafel der Disjunktion ist folgende Aussage: Nur wenn A und B beide nicht wahr sind, dann ist $(A \vee B)$ falsch. Bevor wir diesen Zusammenhang mathematisch richtig formulieren können, benötigen wir noch eine Wahrheitstafel für den Sachverhalt, dass aus einer Aussage A eine Aussage B folgt.

Definition 2.10. Eine Aussage A **impliziert** eine Aussage B, in Zeichen $A \Rightarrow B$, wenn gilt:

Immer dann, wenn A wahr ist, so ist auch B wahr.

Wir lesen $A \Rightarrow B$ als "A impliziert B" oder "aus A folgt B" oder "gilt A, dann gilt auch B".

Wir beobachten, es gilt dann folgende Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Wichtig in dieser Festlegung ist, dass wenn A nicht gilt, so ist $A \Rightarrow B$ immer richtig, d.h. aus einer falschen Aussage kann wahrheitsgemäß alles gefolgert werden. Bemerke, das "Wenn..., dann..." sagt nichts über den kausalen Zusammenhang der beiden Aussagen aus.

Beispiel 2.11.
1. Die Aussage (“Die Sonne scheint.” $\Rightarrow$ “2 ist eine Gerade Zahl.”) ist wahr.
2. Die Aussage (“Katzen haben 5 Ohren.” $\Rightarrow$ “2 ist eine Gerade Zahl.”) ist wahr.
3. Die Aussage (“Draußen regnet es.” $\Rightarrow$ “Es sind Wolken am Himmel.”) ist wahr.
4. Die Aussage (“Es sind Wolken am Himmel. ” $\Rightarrow$ “Draußen regnet es.”) ist nicht wahr.

Noch stärker als die Implikation ist die Äquivalenz zweier Aussagen.

Definition 2.12. Zwei Aussagen A und B heißen **äquivalent** (oder **gleichbedeutend**), wenn $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ gilt, d.h. A und B haben den gleichen Wahrheitswert. Wir schreiben kurz $A \Leftrightarrow B$.

Wir beobachten, es gilt dann folgende Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
w	w	w	w	w
w	f	f	w	f
f	w	w	f	f
f	f	w	w	w

Satz 2.13. *Seien A und B Aussagen. Dann gilt* $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$.

Beweis. Beachte, es sind zwei Richtungen zu zeigen: $\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ (genannt die *Hin-Richtung*) und $(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg(A \vee B)$ (genannt die *Rück-Richtung*). Für die Hin-Richtung betrachten wir folgende Wahrheitstafel:

A	$\neg A$	B	$\neg B$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A \wedge \neg B)$	$\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
w	f	w	f	f	f	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	f	f	w
f	w	f	w	w	w	w

Die Rück-Richtung wird eine Übungsaufgabe sein. □

Lemma 2.14. *Seien A und B Aussagen. Dann gilt:*

1. $A \Leftrightarrow \neg\neg A$ *(Doppelnegationsregel).*
2. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ *(Kontrapositionsregel).*
3. $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge \neg B)$ *(Widerspruchsregel).*

Beweis. Übung! □

3 Beweistechniken

Wir haben nun gesehen, dass wir mit Hilfe von Wahrheitstafeln Aussagen beweisen können. Grundlegend unterscheiden wir drei Arten von Beweisen um zu zeigen, dass aus einer Aussage A eine Aussage B folgt, d.h. $A \Rightarrow B$.

1. Der Direkte Beweis: Wir setzen A voraus und verwenden Axiome und bereits gezeigte Aussagen um schließlich bei Aussage B zu landen.

2. Der Beweis durch Kontraposition (auch indirekter Beweis genannt): Wir verwenden die Kontrapositionsregel, die besagt, dass $(A \Rightarrow B)$ gleichbedeutend ist mit $(\neg B \Rightarrow \neg A)$. Wir gehen in diesem Fall davon aus, dass B nicht gilt und wollen zeigen, dass dann auch A nicht gilt. Das machen wir mit ähnlichen Methoden wie zuvor.

3. Widerspruchsbeweis: Wir verwenden die Widerspruchsregel, dass heißt, wir nehmen an, dass A wahr ist, aber gleichzeitig B nicht wahr ist. Wir müssen dann zeigen, dass in jedem Fall $A \wedge \neg B$ nie wahr ist, das heißt es gibt immer einen Widerspruch in dieser Aussage. Bemerke, dass es im Allgemeinen nicht klar ist, wo dieser Widerspruch entstehen könnte. Beachte auch, dass wenn $\neg A \wedge B$ wahr ist, dann kann über den Wahrheitswert von $A \Rightarrow B$ im Allgemeinen nichts ausgesagt werden.

Abhängig von der Situation lässt sich einer der drei Wege benutzen um eine Aussage zu zeigen. z.B. für die Aussage "Es regnet."$\Rightarrow$"Wolken sind am Himmel." passen folgende Aussagen:

1. Da es regnet, sind Wolken am Himmel.

2. Da keine Wolken am Himmel sind, regnet es nicht.

3. Angenommen es regnet und gleichzeitig sind keine Wolken am Himmel, dann passt das nicht in unsere Vorstellung. Wir haben also einen Widerspruch.

4 Einführung in die Mengenlehre

Im vorherigen Abschnitt haben wir ein paar logische Grundprinzipien kennengelernt, auf denen wir unsere Mathematik aufbauen. Bisher haben wir uns jedoch noch nicht auf ein *sinnvolles* Axiomensystem festgelegt. Anders als in vielen anderen Bereichen verlangen wir von der Mathematik, dass sie aufgebaut werden soll auf einem System, das beständig ist. Eine Aussage wie "Berlin ist die Hauptstadt Deutschlands" ist demnach nicht sinnvoll, da wir nicht vorhersagen können, ob diese Aussage immer gelten wird.

In diesem Kurs werden wir vor allem verschiedene Mengen untersuchen. Unter einer Menge verstehen wir eine Ansammlung von Elementen. Wir schreiben $\{a,b,c,\dots\}$ für eine Menge, wobei a,b und c irgendwelche Elemente sind. Ist a enthalten in der Menge M, so schreiben wir $a \in M$ andernfalls schreiben wir $a \notin M$.

Für die Mengenlehre hat sich anfang des 20. Jahrhunderts ein bestimmtes Axiomensystem eingebürgert. Es besteht aus zehn Axiomen und wird die Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre genannt. Es setzt die nötigen Eigenschaften, die wir brauchen, um mit Mengen umzugehen. Wir werden zudem in diesem Abschnitt einige Symbole kennenlernen, die in der Mathematik essentiell wichtig sind.

Definition 4.1. Es sei $E(x)$ eine Aussage (auch Prädikat oder Vorschrift genannt), die überprüft, ob etwas für x gilt oder nicht. Mit $\{x : x \text{ erfüllt } E(x)\}$ bezeichnen wir die Menge der x, die die Aussage E erfüllen. Ist die Aussage $E(y)$ wahr für ein y, so schreiben wir $y \in \{x : x \text{ erfüllt } E(x)\}$. Die Existenz dieser Mengen liefert das **Aussonderungsaxiom**.

Beispiel 4.2.

1. $E(x) =$"x ist Säugetier". Dann ist (Elefant) $\in \{x : x \text{ erfüllt } E(x)\}$ und (Forelle)$\notin \{x : x \text{ erfüllt } E(x)\}$.
2. $E(x) =$"x ist gerade Zahl". Dann ist $\{x : x \text{ erfüllt } E\} = \{x : x \text{ ist gerade}\} = \{\ldots,-2,0,2,4,6,\ldots\}$ die Menge der geraden Zahlen.

Definition 4.3. Es sei X eine Menge. Eine Menge A ist Teilmenge von X, kurz $A \subset X$, wenn für alle $a \in A$ folgt $a \in X$. Wir nennen

$$A^c := X \setminus A := \{x : x \in X \wedge x \notin A\}.$$

das **Komplement von** A **in** X.

Die folgenden Axiome verwenden wir für Mengen:

1. **Extensionalitätsaxiom**: Zwei Mengen M und N sind gleich genau dann, wenn für alle $x \in M$ folgt $x \in N$ und für alle $x \in N$ folgt $x \in M$. Mit den Zeichen der Logik und dem Symbol (auch Quantor genannt) für "für alle", $\forall$, lässt sich dieses Axiom schreiben als:

   $$\forall M,N : [(M = N) \Leftrightarrow ([(x \in M) \Rightarrow (x \in N)] \wedge [(x \in N) \Rightarrow (x \in M)])]$$

   Hierbei lesen wir einen Doppelpunkt als "gilt" bzw. "mit (der Eigenschaft)".

2. **Leermengenaxiom**: Es gibt eine Menge, die keine Elemente enthält. Mit dem Symbol für "es gibt mindestens ein(e)", $\exists$, lässt sich dieses Axiom schreiben als:

   $$\exists \emptyset : [\forall x : x \notin \emptyset].$$

3. **Paarmengenaxiom**: Für alle a, b gibt es genau eine Menge X, die nur die Elemente a und b besitzt. Wir schreiben $X = \{a,b\}$. Falls $a = b$, dann schreiben wir $X = \{a\}$. Das Symbol für "es gibt genau ein" ist $\exists!$.

4. **Vereinigungsaxiom**: Für jede Menge X gibt es eine Menge Y, die genau die Elemente der Elemente von X als Elemente hat. Y ist eindeutig bestimmt und wird auch "Vereinigung der Elemente von X" genannt. Ist zum Beispiel $X = \{\{x_1\},\{x_2,x_3\}\}$, dann ist $Y = \{x_1,x_2,x_3\}$. Mit dem Paarmengenaxiom können wir für zwei Mengen M,N setzen:

   Die Vereinigung von M und N: $M \cup N := \{x : x \in M \vee x \in N\} \mathrel{\hat{=}}$ "M **vereinigt mit** N".

und

Der Schnitt von M und N: $\quad M \cap N := \{x \, : \, x \in M \wedge x \in N\} \hat{=}$ "M **geschnitten mit** N".

Beachte, dass mit Hilfe von Übungsblatt 2, Nr. 4 i)+ii) $M \cap N = (M^c \cup N^c)^c$ gilt.

5. **Unendlichkeitsaxiom**: Es gibt eine Menge I, die die leere Menge enthält und wenn $X \in I$ ist, dann ist auch $X \cup \{X\}$ ein Element von I. Wir bezeichnen diese Mengen als **(mengen-)induktiv**. Zum Beispiel ist

$$I = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \ldots\}$$

eine (mengen-)induktive Menge. Durch Identifikation mit der Anzahl der Elemente in den Elementen von I können wir I auch als die *natürlichen Zahlen (mit* 0*)*, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, auffassen.

6. **Potenzmengenaxiom**: Für jede Menge X gibt es eine Menge $\mathbb{P}(X)$, die alle Teilmengen von X enthält. $\mathbb{P}(X)$ ist eindeutig bestimmt und heißt **Potenzmenge von** X. Zum Beispiel ist für $X = \{x_1, x_2\}$ die Potenzmenge von X gegeben als:

$$\mathbb{P}(X) = \{\emptyset, \{x_1\}, \{x_2\}, X\}.$$

7. **Fundierungsaxiom**: Zu jeder nichtleeren Menge M gibt es ein Element $X \in M$ mit M und X sind **disjunkt**, d.h. $M \cap X = \emptyset$. Zum Beispiel ist $M = \{X\}$, dann ist $X \cap M = \emptyset$. Genauer: $\{x_1\} \in \mathbb{P}(\{x_1, x_2\})$ und es ist $\{x_1\} \cap \mathbb{P}(\{x_1, x_2\}) = \emptyset$.

8. **Ersetzungsaxiom**: Bezieht sich auf Zuordnungen. Werden wir hier nicht näher besprechen.

9. **Auswahlaxiom** (wird nicht immer angenommen): Gegeben seien eine Menge X und eine Menge M von nichtleeren Teilmengen von X, die paarweise disjunkt sind, d.h. $A, B \in M \Rightarrow A \cap B = \emptyset$ und $A, B \neq \emptyset$. Dann gibt es eine Teilmenge P von X, so dass für alle $A \in M$ gilt $P \cap A \neq \emptyset$. Betrachte z.B. $X = \{a, b, c\}$ und $M = \{\{a\}, \{b, c\}\}$, dann kann $P = \{a, b\} \subset X$ gewählt werden und $P \cap \{a\} \neq \emptyset$ und $P \cap \{b, c\} \neq \emptyset$.

Wir können nun mit diesen Axiomen folgende Aussagen zeigen:

Lemma 4.4. *Es sei X eine Menge, $A, B \subset X$ (d.h. $A \subset X$, $B \subset X$), dann gilt*

i) $A \cup A^c = X$ *und* $A \cap A^c = \emptyset$

ii) $A = (A^c)^c$

iii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

iv) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Beweis. zu i) um die Gleichheit zwischen zwei Mengen zu zeigen, benötigen wir das Extensionalitätsaxiom. Wir teilen also unseren Beweis auf in die Beweise $A \cup A^c \subset X$ und $A \cup A^c \supset X$.

"$\subset$" Es gilt $A \subset X$ und per Definition auch $A^c \subset X$. Nach Übungsblatt 2, Nr.3(i) folgt nun $A \cup A^c \subset X$.

"$\supset$" Es sei $x \in X$. Ist $x \in A$, dann folgt $x \in A \cup A^c$. Ist andernfalls $x \notin A$, dann ist per Definition $x \in A^c$ und damit $x \in A \cup A^c$. Da x beliebig gewählt war, folgt, dass $X \subset A \cup A^c$ ist.

Der zweite Teil von i) ist trivial, denn angenommen es gäbe $x \in A \cap A^c$, dann folgt insbesondere $x \in A^c$ und $x \in A$, d.h. $x \notin A$ und $x \in A$. Das ist aber ein Widerspruch.

ii) - iv) sind Übungen. $\square$

5 Verneinung von Aussagen

Wir haben im vorherigen Abschnitt zwei neue mathematische Symbole (auch *Quantoren* genannt) kennengelernt: $\forall$, $\exists$ und $\exists!$. Im Folgenden werden wir uns besonders mit $\forall$ und $\exists$ beschäftigen und Untersuchen, wie sich diese Symbole bei Verneinung von Aussagen verhalten.

Definition 5.1. Es sei M eine Menge und $A(x)$ eine Aussage, die für $x \in M$ entweder wahr oder falsch ist. Wir definieren

$$\neg\left(\forall x \in M : A(x)\right) \;:\Leftrightarrow\; \exists x \in M : \neg A(x).$$

In einem einfachen Beispiel können wir das so auffassen: Betrachte einen Apfelbaum. Wir setzen M als die Menge aller Äpfel am Baum und jeder einzelne Apfel am Baum ist ein Element von M. $A(x)$ sei nun die Aussage, x ist ein roter Apfel. Dann gilt:

$$\neg\big(\text{Alle Äpfel am Baum sind rot.}\big) \;:\Leftrightarrow\; \big(\text{Es gibt einen Apfel am Baum, der nicht rot ist.}\big)$$

Oftmals werden wir jedoch auch Aussagen untersuchen, die von zwei Werten abhängen, d.h. es gibt Mengen M und N und eine Aussage $A(x,y)$, die für $x \in M$ und $y \in N$ wahr oder falsch ist. Betrachte zum Beispiel M als die Menge der Studenten in Raum 1 und N als die Menge der Studenten in Raum 2 und untersuche die Aussage $A(x,y)$, die besagt, dass die Person x aus M und y aus N befreundet sind. Wie ist dann die Verneinung von

(Für alle Personen x in Raum M gibt es eine Person y in Raum N, sodass x und y befreundet sind.) ?

Lemma 5.2. *Es seien M und N Mengen und $A(x,y)$ eine Aussag, die für $x \in M$ und $y \in N$ entweder wahr oder falsch ist. Dann gilt:*

$$\neg\left(\forall x \in M : \exists y \in N : A(x,y)\right) \;\Leftrightarrow\; \exists x \in M : \forall y \in N : \neg A(x,y).$$

Beweis. Wir haben eine "genau dann, wenn"-Aussage zu zeigen, d.h. wir müssen zwei Richtungen beweisen:

(Hin-Richtung)“$\Rightarrow$” $\neg\,(\forall x \in M : \exists y \in N : A(x,y)) \;\Rightarrow\; \exists x \in M : \forall y \in N : \neg\, A(x,y)$;

(Rück-Richtung)“$\Leftarrow$” $\exists x \in M : \forall y \in N : \neg A(x,y) \;\Rightarrow\; \neg\,(\forall x \in M \exists y \in N : A(x,y))$.

Wir betrachten zunächst die Hin-Richtung und setzen $B(x)$ als die Aussage “für x gilt $\exists y \in N : A(x,y)$”. Dann ist

$$\begin{aligned}\neg\,(\forall x \in M : \exists y \in N : A(x,y)) &\Leftrightarrow \neg\,(\forall x \in M : B(x))\\ &\Leftrightarrow \exists x \in M : \neg\, B(x)\\ &\Leftrightarrow \exists x \in M : \neg(\exists y \in N : A(x,y))\\ &\Leftrightarrow \exists x \in M : \neg(\neg\,(\forall y \in N : \neg\, A(x,y)))\\ &\Leftrightarrow \exists x \in M : \forall y \in N : \neg\, A(x,y).\end{aligned}$$

Für die Rück-Richtung beachte, dass die obigen Folge-Pfeile sogar Äquivalenzen sind (nach Definition und Übungsblatt 1, Nr. 1). Demnach gilt auch die Rück-Richtung. $\square$

Beispiel 5.3. Wir betrachten folgende abstrakte Aussage – ihre Bedeutung wird euch im Laufe des Semesters klarer.

$$\forall \varepsilon > 0 \;: \exists n_0 \in \{1,2,3,\dots\} :\; \forall n \geq n_0 \;: \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Die Verneinung dieser Aussage ist:

$$\exists \varepsilon > 0 \;: \forall n_0 \in \{1,2,3,\dots\} :\; \exists n \geq n_0 \;: \frac{1}{n} \geq \varepsilon.$$

Überlegen Sie sich, welche der beiden Aussagen wahr oder falsch ist.

Zur Übung kann folgende Aussage vereinfacht werden:

$$\neg\,\left[\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x,y \in [0,1] : (|x-y| < \delta \Rightarrow |x^2-y^2| < \varepsilon)\right].$$

6 Die natürlichen Zahlen

In diesem Abschnitt wollen wir nochmal genauer auf induktive Mengen eingehen und daraus das **Induktionsprinzip** herleiten, welches eine weitere Beweistechnik liefert.

Definition 6.1. 1. Eine **induktive Menge** ist eine Menge M mit

- $1 \in M$
- $n \in M \Rightarrow n+1 \in M$

2. Wir setzen $\mathbb{M} := \{M \;:\; M \text{ induktiv }\}$ und definieren

$$\mathbb{N} := \bigcap_{M \in \mathbb{M}} M = \{1,2,3,\dots\}.$$

Bemerkung 6.2. Die folgenden Mengen sind induktiv: $\{\frac{1}{2}, 1, 1\frac{1}{2}, 2, 2\frac{1}{2}, 3, \ldots\}$, $\{1, 2, 3, \ldots, a, a+1, a+2, \ldots\}$ für irgendein $a \in \mathbb{R}$ sowie $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$.

Satz 6.3. *(Induktionsprinzip) Es sei $A(n)$ eine Aussage für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$ genau dann, wenn folgende Aussagen wahr sind*

a) $A(1)$ ist wahr <u>und</u>

b) ($A(n)$ ist wahr für ein $n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $A(n+1)$ ist wahr.)

Beweis. Wir haben eine "genau dann, wenn"-Aussage zu zeigen, d.h. wir haben zu zeigen

(Hinrichtung)"$\Rightarrow$" $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N} \Rightarrow$ a)$\wedge$ b) ist wahr;

(Rückrichtung)"$\Leftarrow$" a)$\wedge$ b) ist wahr $\Rightarrow A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.

Offensichtlich ist die Hinrichtung klar. Betrachten wir nun die Rückrichtung. Es seien a) und b) wahr und angenommen es gäbe ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $A(n_0)$ nicht wahr ist. Beachte $n_0 > 1$, da nach a) $A(1)$ wahr ist. Nun ist nach b) $A(n_0 - 1)$ nicht wahr (also $n_0 - 1 > 1$). Wiederrum nach b) ist dann $A(n_0 - 2)$ nicht wahr usw. Da wir $n_0 \in \mathbb{N}$ gewählt haben, folgt nach endlich vielen Schritten $A(1)$ ist nicht wahr im Widerspruch zu a). Damit folgt $A(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Lemma 6.4. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis. Wir verwenden das Induktionsprinzip. Hierfür betrachten wir die Aussage:

$A(n)$ ist die Aussage, dass für n gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Das Induktions**ABS** besteht aus drei Schritten, dem Induktions**A**nfang, der Induktions**B**ehauptung und dem Induktions**S**chritt:

Induktionsanfang (IA): Zu zeigen ist, dass $A(n)$ wahr ist für $n = 1$:

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Induktionsbehauptung (IB): Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ mit $A(n)$ ist wahr, d.h. für dieses n gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

(Beachte: Diese Aussage ist NICHT zu zeigen, wir setzen sie voraus)

Induktionsschritt (IS): Zu zeigen ist, dass aus Behauptung (IB) folgt: $A(n+1)$ ist wahr.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) &\overset{(IB)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}.\end{aligned}$$

Es folgt $A(n+1)$ ist wahr.

Aus (IA) und (IB) in Kombination mit (IS) und dem Satz zum Induktionsprinzip folgt $A(n)$ ist wahr für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Aussage gezeigt. $\square$

7 Spezielle Mengen

Wir werden in vielen Situationen mit den folgenden Mengen konfrontiert werden:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &:= \{1,2,3\ldots\} && \text{(natürliche Zahlen)}, \\ \mathbb{N}_0 &= \{0,1,2,\ldots\} && \text{(natürliche Zahlen mit 0)}, \\ \mathbb{Z} &:= \{\ldots,-2,-1,0,1,2,\ldots\} && \text{(ganze Zahlen)} \\ \mathbb{Q} &:= \left\{\frac{z}{n} \,:\, z \in \mathbb{Z},\, n \in \mathbb{N}\right\} && \text{(rationale Zahlen)}, \\ \mathbb{R} &:= \text{Menge der reellen Zahlen} && \text{(Konstruktion kompliziert; siehe Analysis 1)}, \\ \mathbb{C} &:= \{a+ib \,:\, a,b \in \mathbb{R}\} && \text{(komplexe Zahlen)}, \end{aligned}$$

wobei i *imaginäre Einheit* genannt wird, und

$$\text{für } p \in \mathbb{N}\text{: } \mathbb{Z}_p := \{0,1,\ldots,p-1\} \qquad (p\text{-Restklassenring}).$$

Im Folgenden werden wir einen genaueren Blick auf $\mathbb{C}$ und auf $\mathbb{Z}_p$ für $p \in \mathbb{N}$ werfen.

7.1 Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Ein wohlbekanntes Problem ist, dass die Gleichung $x^2 + 1 = 0$ nicht zu lösen ist mit Hilfe der reellen Zahlen. Um dieser "Unvollständigkeit" entgegenzuwirken führen wir die imaginäre Einheit i ein, die die Eigenschaft

$$i^2 = -1$$

besitzt. Fügen wir i und alle damit entstehenden Kombinationsmöglichkeiten zu den reellen Zahlen hinzu, so erhalten wir die Menge der komplexen Zahlen:

$$\mathbb{C} = \{a+ib \,:\, a,b \in \mathbb{R}\}.$$

In $\mathbb{C}$ lässt sich nun die Gleichung $x^2+1=0$ lösen. Sie hat die beiden Lösungen i und $-i$. Wir können in $\mathbb{C}$ wie gewohnt rechnen:

Es sei $z_1 = a+ib$ und $z_2 = c+id$ für $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, dann ist

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= a+ib+c+id = (a+c)+i(b+d) \\ z_1 \cdot z_2 &= (a+ib)(c+id) = ac+i^2bd+i(bc+ad) = ac-bd+i(bc+ad). \end{aligned}$$

Insbesondere die Addition gibt uns die Möglichkeit $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ zu identifizieren:

Bildeinfügen

Definition 7.1. Es sei $z = a+ib \in \mathbb{C}$.

1. Wir bezeichnen den *Realteil* von z mit a, d.h. $Re(z) = a$.
2. Wir bezeichnen den *Imaginärteil* von z mit b, d.h. $Im(z) = b$.
3. Wir setzen $|z| = \left(a^2+b^2\right)^{1/2}$, der *Betrag von z*.
4. Wir setzen $\bar{z} = a - ib$ als *die zu z komplex konjugierte Zahl*.

Bemerkung 7.2. Wir können in der Ebene $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ Realteil und Imaginärteil als x und y Koordinate auffassen. Der Betrag beschreibt gerade die Länge dieses Vektors.

Beispiel 7.3.

1. Betrachte $z = i$, dann ist $Re(i) = 0$, $Im(i) = 1$ und $|i| = \left(0^2+1^2\right)^{1/2} = 1$. Außerdem ist $\bar{i} = -i$
2. Betrachte $z = 1+i$, dann ist $Re(1+i) = 1$, $Im(1+i) = 1$, $|1+i| = \left(1^2+1^2\right)^{1/2} = \sqrt{2}$ und $\overline{1+i} = 1-i$.

Wir bemerken, dass durch die Setzung $i^2 = -1$ wir eine Multiplikation haben, doch was ist z.B. $\frac{1+i}{i}$?

Lemma 7.4. *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $z\bar{z} = |z|^2 \in [0,\infty)$.*

Beweis. Sei $z = a+ib$, $a,b \in \mathbb{R}$, dann ist

$$(a+ib)(a-ib) = a^2 - i^2b^2 + i(ab-ba) = a^2+b^2 = |z|^2.$$

□

Auf diese Art lassen sich zwei komplexe Zahlen einfach teilen in dem wir einen Bruch mit dem komplex konjugierten Nenner erweitern: Es gilt

$$\frac{1+i}{i} = \frac{(1+i)(-i)}{i(-i)} = -i-i^2 = 1-i$$

und

$$\frac{i}{i+1} = \frac{i(i-1)}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Allgemein gilt: Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, dann ist

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|}.$$

Bisher haben wir eine komplexe Zahl als x und y Koordinate in der Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ aufgefasst. Hier können wir gut die Addition graphisch darstellen. Wir bemerken, dass wir Punkte in der Ebene auch durch den Abstand zum Ursprung der Ebene und einen Winkel auffassen können. Es gilt folgender Zusammenhang:

$$|z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)) = Re(z) + iIm(z) = z,$$

wobei $\varphi \in (-\pi, \pi]$ den Winkel zur positiven x-Achse beschreibt. Ein Zusammenhang, den wir hier vorweg nehmen ist:

Satz 7.5. *(Eulersche Formel) Für alle $\varphi \in (-\pi, \pi]$ gilt*

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi).$$

Beachte: Sind $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit

$$z_1 = |z_1|e^{i\varphi_1} \quad \text{und} \quad z_2 = |z_2|e^{i\varphi_2},$$

dann ist

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|e^{i\varphi_1} \cdot |z_2|e^{i\varphi_2} = |z_1| \cdot |z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}.$$

Multiplikation in $\mathbb{C}$ steht also für eine Addition der Winkel, d.h. eine Drehung.

8 Anhang

Auf den folgenden Seiten finden Sie die Aufgaben und das Quiz sowie Lösungsskizzen zu diesen Aufgaben. In den Übungsaufgaben werden Sie in erster Linie überprüfen können in wie weit Sie den Vorlesungsstoff verstanden haben. Darüber hinaus lernen Sie erst dort, wie Mathematik funktioniert. Nicht immer ist der Lösungsweg offensichtlich und oft müssen Sie eine lange Zeit an einer Aufgabe arbeiten, bis Sie die Lösung aufschreiben können.

Diese Zeit ist jedoch notwendig und wichtig, denn erst mit dieser Zeit kommt auch das *richtige* Verständnis der Problemstellungen. Beachten Sie, dass erst diejenigen Aufgaben, die Sie aufschreiben und erklären können, richtig verstanden sind. Wie Sie an Übungsaufgaben herangehen können, können Sie auch in [2] nachlesen.

Institut für Mathematik
Goethe-Universität Frankfurt
Dipl. Math. Sven Jarohs

Mathematik Vorkurs
Übungen Sommersemester 2014

Blatt 1 Datum: 07.04.2014

1. Es seien A und B Aussagen. Zeigen Sie die folgenden Behauptungen mit Hilfe von Wahrheitstafeln:

   (i) $A \Leftrightarrow \neg\neg A$

2. Es seien A und B Aussagen. Zeigen Sie:

$$(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg (A \vee B)$$

3. Zeigen Sie, dass für zwei Aussagen A und B gilt

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)\,.$$

4. Es seien A und B Aussagen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

   (i) $A \Rightarrow B$

   (ii) $\neg B \Rightarrow \neg A$

   (iii) $\neg(A \wedge \neg B)$

5. Formulieren Sie zu jeder Aufgabe Beispielsätze anhand derer sich die Implikationen bzw. Äquivalenzen veranschaulichen lassen.

6. In dieser Aufgabe dürfen Sie Ihr Schulwissen verwenden. Es seien a, b reelle Zahlen. Zeigen Sie

   (i) mit Hilfe eines direkten Beweises: Ist a eine gerade Zahl, so ist a^2 eine gerade Zahl.

   (ii) per Kontraposition: Teilt eine Primzahl p eine Zahl a^2 so teilt p auch a.

   (iii) per Widerspruchsbeweis: Ist $a \cdot b = 0$, so gilt $(a = 0 \vee b = 0)$.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
GOETHE-UNIVERSITÄT FRANKFURT
Dipl. Math. Sven Jarohs

Mathematik Vorkurs
Übungen Sommersemester 2014

Blatt 2 — Datum: 08.04.2014

1. Schreiben Sie das Unendlichkeitsaxiom, das Paarmengenaxiom und das Potenzmengenaxiom in einer mathematischen Kurzform.

2. Geben Sie mindestens ein weiteres Beispiel zu jedem Axiom aus Kapitel 4 an.

3. Es sei X eine Menge. Zeigen Sie für $A, B \subset X$:

   (i) $A \cup B \subset X$,

   (ii) $A \cap B \subset X$.

4. Es sei X eine Menge und $A, B \subset X$ seien Teilmengen. Zeigen Sie

   i) $A = (A^c)^c$,

   ii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$,

   iii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

5. Es seien A und B Mengen. Zeigen Sie:

$$A = B \Leftrightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B).$$

6. Betrachten Sie $X = \{a, b, c, d, e\}$. Bestimmen Sie eine Menge M bestehend aus 3 Elementen, die die Bedingungen für das Auswahlaxiom erfüllt. Geben Sie ferner eine Menge $P \subset X$ an, die nach dem Auswahlaxiom existiert.

INSTITUT FÜR MATHEMATIK
GOETHE-UNIVERSITÄT FRANKFURT
Dipl. Math. Sven Jarohs

Mathematik Vorkurs
Übungen Sommersemester 2014

Blatt 3 Datum: 09.04.2014

1. Schreiben Sie folgende Aussagen um

   (i) $\neg\left[\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in [0,1] : (|x-y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < \varepsilon)\right]$

2. Zeigen Sie mit Hilfe des Induktionsprinzips
$$\forall n \in \mathbb{N} \,:\, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3. Zeigen Sie für alle $n \geq 4$ gilt
$$n^2 < 2^n.$$

4. Zeigen Sie, dass 3 die Zahl $(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ teilt.

5. Bestimmen Sie für die folgenden Zahlen den Realteil, Imaginärteil und den Betrag. Zeichnen Sie ferner diese Werte in die Ebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
$$i+1, \quad 3+i, \quad \frac{1+i}{2}, \quad 2, \quad 3i.$$

6. Bestimmen Sie folgende Zahlen in der Form $a+ib$:
$$(i+1)^2, \quad (i+1)(i-1), \quad (i-1)^2, \quad \frac{i+1}{i-1}, \quad \frac{i}{1+3i}.$$

7. Finden Sie diejenigen $z \in \mathbb{C}$ mit $z^2 = i$.

Lösungsskizzen zu Blatt 1

zu Nr. 1 Es sei A eine Aussage. Wir betrachten die Wahrheitstafel:

A	$\neg A$	$\neg(\neg A)$	$A \Rightarrow \neg(\neg A)$	$\neg(\neg A) \Rightarrow A$
w	f	w	w	w
f	w	f	w	w

Die letzten beiden Spalten liefern $A \Leftrightarrow \neg(\neg A)$.

zu Nr. 2 Es seien A und B Aussagen. Wie in der Vorlesung erhalten wir mit gleicher Argumentation

A	$\neg A$	B	$\neg B$	$\neg(A \vee B)$	$(\neg A \wedge \neg B)$	$(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg(A \vee B)$
w	f	w	f	f	f	w
w	f	f	w	f	f	w
f	w	w	f	f	f	w
f	w	f	w	w	w	w

zu Nr. 3 Es seien A und B Aussagen. Wie in Aufgabe 2 erhalten wir

A	$\neg A$	B	$\neg B$	$\neg(A \wedge B)$	$(\neg A \vee \neg B)$	$(\neg A \wedge \neg B) \Rightarrow \neg(A \vee B)$	$\neg(A \vee B) \Rightarrow (\neg A \wedge \neg B)$
w	f	w	f	f	f	w	w
w	f	f	w	w	w	w	w
f	w	w	f	w	w	w	w
f	w	f	w	w	w	w	w

Wiederum liefern die letzten beiden Spalten die Aussage.

zu Nr. 4 Es seien A und B Aussagen. Wir erhalten

A	$\neg A$	B	$\neg B$	$A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$	$\neg(A \wedge \neg B)$
w	f	w	f	w	w	w
w	f	f	w	f	f	f
f	w	w	f	w	w	w
f	w	f	w	w	w	w

Beachte, dass die letzten 3 Spalten den gleichen wahrheitsgehalt haben. Demnach sind alle 3 äquivalent.

zu Nr. 6 zu (i) Beachte, a ist gerade, wenn $a = 2 \cdot k$ für ein $k \in \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$. Sei also a gerade, dann ist $a = 2 \cdot k$ für ein (festes) $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist $a^2 = (2 \cdot k)^2 = 2^2 \cdot k^2 = 2 \cdot 2 \cdot k^2$. Nun ist $k^2 \in \mathbb{Z}$ und $2 \cdot k^2 \in \mathbb{Z}$ also ist $a^2 = 2 \cdot \tilde{k}$ für ein $\tilde{k} \in \mathbb{Z}$ ($\tilde{k} = 2 \cdot k^2$) und das heißt a^2 ist gerade, was zu zeigen war.

zu (ii) Beachte, p heißt Primzahl, wenn p genau 2 Teiler hat, nämlich sich selbst und die 1. Die Menge der Primzahlen ist $\{2,3,5,7,11,\ldots\}$. Ferner lässt sich jede Zahl $a \in \mathbb{N} = \{1,2,\ldots\}$ eindeutig in ihrer Primfaktordarstellung als ein Produkt darstellen:

$$a = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots p_n^{r_n},$$

wobei $p_1, \ldots p_n$ Primzahlen sind und $r_1, \ldots r_n$ Exponenten sind, die angeben, wie oft a durch die jeweilige Primzahl teilbar ist.

Für die Kontraposition sei nun a eine Zahl, die nicht durch p teilbar ist. dann ist $a = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots p_n^{r_n}$, und $p \neq p_i$ für alle $i = 1,2,\ldots,n$. Dann ist

$$a^2 = (p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \ldots p_n^{r_n})^2 = p_1^{2r_1} \cdot p_2^{2r_2} \cdot \ldots p_n^{2r_n}.$$

Da $p \neq p_i$ für alle i ist nun auch a^2 nicht durch p teilbar und damit haben wir die Aussage gezeigt.

zu (iii) Für den Widerspruch machen wir uns zunächst klar, dass gilt $\neg(a = 0 \vee b = 0) \Leftrightarrow (a \neq 0 \wedge b \neq 0)$. Sei nun $a \cdot b = 0$ und gleichzeitig $a \neq 0 \neq b$, dann können wir durch (beispielsweise) b in der Gleichung teilen und erhalten:

$$a = \frac{a \cdot b}{b} = \frac{0}{b} = 0.$$

Das ist aber ein Widerspruch, da wir vorausgesetzt haben, dass $a \neq 0$ gilt. Es folgt die Aussage.

Lösungsskizzen zu Blatt 2

zu Nr. 1 Das Unendlichkeitsaxiom lässt sich schreiben als

$$\exists\, I\, :\, (\emptyset \in I \wedge (X \in I \Rightarrow X \cup \{X\} \in I)\,).$$

Das Paarmengenaxiom lässt sich schreiben als

$$\forall a,b\, :\, (\exists !\, X\, :\, (a = b \Rightarrow X = \{a\} \wedge a \neq b \Rightarrow X = \{a,b\})\,).$$

Das Potenzmengenaxiom lässt sich schreiben als

$$\forall X\, \exists !\, \mathbb{P}(X)\, :\, (A \subset X \Rightarrow A \in \mathbb{P}(X)).$$

zu Nr. 3 Es sei X eine Menge und $A,B \subset X$.

zu (i): Sei $x \in A \cup B$. Dann ist $x \in A$ oder $x \in B$. Da $A,B \subset X$ folgt in beiden Fällen $x \in X$. Es gilt also $x \in A \cup B \Rightarrow x \in X$ und damit gilt $A \cup B \subset X$.

zu (ii): Sei $x \in A \cap B$. Dann ist $x \in A$ und $x \in B$. Also insbesondere $x \in A \subset X$. Also $x \in X$. Es folgt $A \cap B \subset X$.

zu Nr. 4 Seien X,A,B wie gefordert gegeben.

zu (i): "$\subset$": $a \in A \;\Rightarrow\; a \notin A^c \;\Rightarrow\; a \in (A^c)^c$.

"$\supset$": $a \in (A^c)^c \;\Rightarrow\; a \notin A^c \;\Rightarrow\; a \in A$.

zu (ii): "$\subset$": Es sei $x \in (A \cup B)^c$. Dann ist $x \notin A \cup B$, also gilt

$$\neg(x \in A \;\vee\; x \in B) \;\Leftrightarrow\; \neg(x \in A) \wedge \neg(x \in B) \;\Leftrightarrow\; x \in A^c \;\wedge\; x \in B^c.$$

Das bedeutet aber $x \in A^c \cap B^c$.

"$\supset$": Es sei $x \in A^c \cap B^c$. Dann gilt wie eben

$$x \in A^c \;\wedge\; x \in B^c \Leftrightarrow \neg(x \in A \;\vee\; x \in B).$$

Also $x \notin A \cup B$. Es folgt also $x \in (A \cup B)^c$.

zu (iii): "$\subset$": Wir gehen vor wie in (ii):Es sei $x \in (A \cap B)^c$. Dann ist $x \notin A \cap B$, also gilt

$$\neg(x \in A \;\wedge\; x \in B) \;\Leftrightarrow\; \neg(x \in A) \vee \neg(x \in B) \;\Leftrightarrow\; x \in A^c \;\vee\; x \in B^c.$$

Das bedeutet aber $x \in A^c \cup B^c$.

"$\supset$": Es sei $x \in A^c \cup B^c$. Dann gilt wie eben

$$x \in A^c \;\vee\; x \in B^c \Leftrightarrow \neg(x \in A \;\wedge\; x \in B).$$

Also $x \notin A \cap B$. Es folgt also $x \in (A \cap B)^c$.

zu Nr. 5 Wir haben zwei Richtungen zu zeigen:

"$\Rightarrow$": Ist $A = B$ dann gilt $P(A) = P(B)$, da die Potenzmenge eindeutig ist.

"$\Leftarrow$": Sei $P(A) = P(B)$. Angenommen $A \neq B$. Dann existiert ohne Einschränkungen ein $a \in A$ mit $a \notin B$ (anderfalls existiert $b \in B$ mit $b \notin A$ und wir können im folgenden A mit B vertauschen. Beachte: Gilt keiner dieser beiden Fälle, dann muss $A = B$ sein). Da $a \in A$ folgt $\{a\} \subset A$. Und damit ist $\{a\} \in P(A) = P(B)$. Also ist $\{a\} \subset B$. Nach Definition einer Teilmenge folgt also $a \in B$. Das ist aber ein Widerspruch nach Wahl von a. Es folgt $A = B$.

zu Nr. 6 Wähle zum Beispiel $M = \{\{a\}, \{b, c\}, \{d, e\}\}$ und $P = \{a, b, d\}$ erfüllt die Bedingungen des Auswahlaxioms.

Literatur

[1] M. Junker, *Einführung in die Sprache der Mathematik*, 2010, online verfügbar: http://home.mathematik.uni-freiburg.de//junker/skripte/Grundlagen-WS1011.pdf

[2] M. Lehn, *Wie bearbeitet man ein Übungsblatt?*, online verfügbar: http://www.mathematik.uni-mainz.de/Members/lehn/le/uebungsblatt